DS N°6

I ① $f(x) = ax^2 + bx + c$ donc $f(0) = c > 0$ et f admet deux racines donc $\Delta > 0$

Ainsi la bonne réponse est **Rep b**

② $x^2 - 5x + 6 < 0$

On a $\Delta = 1$ donc on a deux racines : $x_1 = \frac{5-1}{2} = 4$ et $x_2 = 3$

on a donc le tableau de signe.

x		3		4	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Ainsi $S =]3;4[$ **Réponse c**

③ La **réponse est c**

④ $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ donc pour $x \neq -2$ on a $f'(x) = \frac{(x+2)2 - (2x-1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{5}{(x+2)^2}$ **Réponse c**

⑤ $f(2) = 5$; $f'(2) = -1$ donc $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

donc $T : y = -(x-2) + 5$ Alors $T : y = -x + 7$

Réponse c

II $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$

①a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x^2 + 2x - 3)$

$= \underline{3(x-1)(x+3)}$ (car 1 est racine évidente)

①b

On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+26$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	

$f(-3) = +26$; $f(1) = -6$

1c On a $T : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ avec $f'(-1) = -12$ et $f(-1) = 10$

Alors on a $T : y = -12(x+1) + 10$ donc $T : y = -12x - 2$

2 $g(x) = ax^2 + bx + c$

a D'après C_g, on a $\Delta < 0$ et $a > 0$

b On a $g(-1) = 10$; $f(-1) = 10$ donc le point $A(-1 ; 10) \in C_f \cap C_g$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = 10x^2 + 8x + 8$ alors $g'(x) = 20x + 8$

La tangente à C_g au point d'abscisse -1 est donc $D : y = g'(-1)(x+1) + g(1)$

avec $g(-1) = 10$ et $g'(-1) = -12$ donc $D : y = -12(x+1) + 10$

On déduit donc $D : y = -12x - 2$.

Ainsi T et D sont les mêmes droites et donc C_f et C_g ont une tangente commune au point d'abscisse -1.

III **1** A 40km/h la consommation est de 5l/100km

2 à 100km/h et à 35km/h la consommation est de 8l/100km

3 à 50km/h la consommation semble être minimale et vaut 4l/100km

4) $f(x) = \dfrac{20x^2 - 1600x + 40\,000}{x^2}$

Pour $x \in [30,130]$: $f'(x) = \dfrac{x^2(40x - 1600) - 2x(20x^2 - 1600x + 40\,000)}{x^4}$

$$= \frac{1600x^2 - 80\,000x}{x^4}$$

$$= \frac{800x(2x - 100)}{x^4}$$

$$= \frac{800(2x - 100)}{x^3}$$

5) Sur $]30;130[$: $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x - 100$

On déduit alors le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	30		50		130
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Avec $f(50) = 4$

La conjecture est donc vérifiée.

IV $f(x) = 8x - 2x^3$; $x \in [0;2]$

1a) Sur $[0,2]$: $f'(x) = 8 - 6x^2$

$= 2(4 - 3x^2)$ alors $f'(x)$ est du signe de $4 - 3x^2$

1b) On a $4 - 3x^2 = 3\left(\frac{4}{3} - x^2\right)$

$$= 3\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}} - x\right)\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}} + x\right)$$

$$= 3\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - x\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + x\right)$$ avec $\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$

On déduit donc le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

Car $a=-6<0$ →

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Avec $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\cdot 2\sqrt{3}}{3} - 2\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{16\cdot 3\sqrt{3}}{3^3}$$

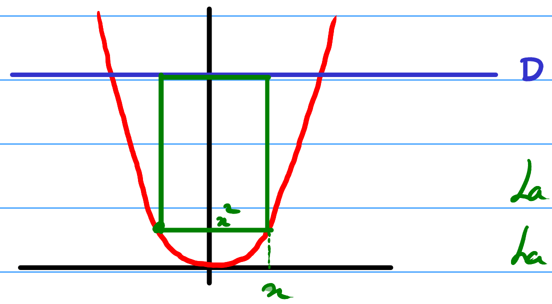
$$= \frac{48\sqrt{3} - 16\sqrt{3}}{9}$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

$$\approx 6{,}16.$$

2a Il est clair que lorsque x se rapproche de 0, la largeur du rectangle devient nulle et sa longueur 4. Donc l'aire devient nulle.
L'aire n'est pas constante.

2b La situation se modélise par la figure suivante :



La largeur du rectangle : $2x$
La longueur du rectangle : $4-x^2$

L'aire vaut donc $\mathcal{A}(x) = 2x(4-x^2)$

$$= 8x - 2x^3$$

$$= f(x)$$

2c D'après le tableau de variations de f, l'aire est maximale en $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et vaut alors $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ $\left(= \frac{32}{3\sqrt{3}}\right)$